

TD 2 : Ensembles

Dans tout ce TD, E est un ensemble et A, B, C et D sont quatre parties de E .

Écriture des ensembles

1 ★★ On note $A = \left\{ x - \frac{1}{x} \mid x \in [1, +\infty[\right\}$. Montrer que $A = \mathbb{R}_+$.

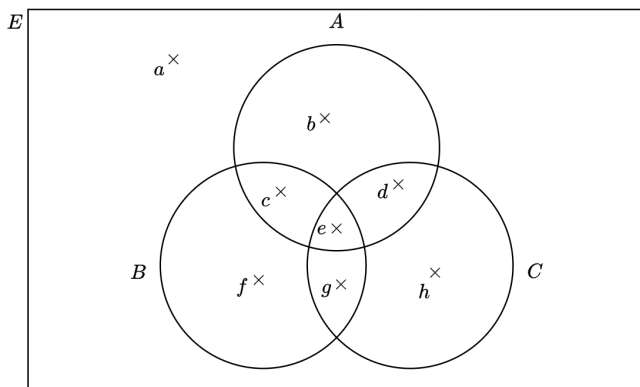
2 ★★ Montrer que les ensembles suivants sont égaux :

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x - y = 1\}$$

$$B = \{(t + 1, 4 + 3t) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

Opérations sur les ensembles

3 ★ On considère un ensemble E à 8 éléments dénotés a, b, c, d, e, f, g, h . On définit A, B et C trois sous-ensembles de E selon le schéma ci-dessous :



1) Déterminer les ensembles suivants :

$$A \cap C, \quad B \setminus (A \cup C), \quad \overline{A} \cup \overline{B}, \quad \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$$

2) Donner une partition de A en quatre ensembles, qu'on exprimera en fonction de A, B et C (ou de leurs complémentaires).

3) Écrire l'ensemble $\{c, d, g\}$ en fonction de A, B et C (ou de leurs complémentaires).

4 ★ Soit $F \subset E$ et P un prédicat défini sur E . Compléter les lignes ci-dessous par $\implies$ ou $\impliedby$ selon ce qui est approprié :

$$\forall x \in E \quad P(x) \quad \dots\dots\dots \quad \forall x \in F \quad P(x)$$

$$\exists x \in E \quad P(x) \quad \dots\dots\dots \quad \exists x \in F \quad P(x)$$

5 ★★ Soit $F \subset E$ et P un prédicat défini sur E . Donner toutes les implications qui sont valides entre les assertions suivantes :

$$A : \quad \forall x \in E \quad \exists y \in E \quad P(x, y)$$

$$B : \quad \forall x \in E \quad \exists y \in F \quad P(x, y)$$

$$C : \quad \forall x \in F \quad \exists y \in E \quad P(x, y)$$

$$D : \quad \forall x \in F \quad \exists y \in F \quad P(x, y)$$

6 ★★ Montrer les équivalences suivantes (attention, c'est long !) :

$$A = B \iff A \cup B = A \cap B$$

$$A \cup B = B \cap C \iff A \subset B \subset C$$

Autres notions du chapitre

7 ★★ Que vaut $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{1\}))$?

8 ★★ Soit A et B deux parties d'un ensemble E . Déterminer si les assertions suivantes sont vraies ou fausses :

$$1) \quad \mathcal{P}(A \cap B) \subset \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$$

$$2) \quad \mathcal{P}(A \cap B) \supset \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$$

$$3) \quad \mathcal{P}(A \cup B) \subset \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$$

$$4) \quad \mathcal{P}(A \cup B) \supset \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$$

9 ★★ Simplifier les ensembles suivants :

$$1) A = \bigcup_{n=1}^{+\infty}]-n, n[$$

$$2) B = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{n}, n \right]$$

$$3) C = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left] 0, 1 + \frac{1}{n} \right[$$

10 ★★★ Soit E un ensemble et $A, B \in \mathcal{P}(E)$. Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $X \in \mathcal{P}(E)$:

$$1. A \cup X = B$$

$$2. A \cap X = B$$